

**SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA**

Sergio Polidoro

**SU UNA CLASSE DI OPERATORI
DI EVOLUZIONE IPOELLITTICI**

14 maggio 1992

Introduzione - I risultati che presenterò in questo seminario sono stati ottenuti in collaborazione con il prof. E. Lanconelli.

Abbiamo dimostrato una disuguaglianza di Harnack invariante per operatori ipoellittici del seguente tipo

$$(1) \quad L = \operatorname{div}(AD) + \langle x, BD \rangle - \partial_t$$

dove le matrici A e B sono a coefficienti costanti, A simmetrica e semidefinita positiva.

Se indichiamo con Y_j il vettore riga j -esima della matrice $A^{1/2}$ e con $Y = \langle x, BD \rangle - \partial_t$, identificando i vettori con gli operatori differenziali del 1° ordine, l'operatore L si può scrivere nella forma seguente:

$$(2) \quad L = \sum_{j=1}^N Y_j^2 + Y;$$

indichiamo poi con $\mathfrak{L}(Y_1, \dots, Y_N, Y)$ l'algebra di Lie generata dagli operatori Y_1, \dots, Y_N, Y .

In (1) è contenuta ovviamente l'equazione del calore ($A = I, B = 0$), ma anche l'operatore di Kolmogorov

$$(3) \quad Lu = u_{xx} + xu_y - u_t.$$

Per questo operatore Kolmogorov ha costruito una soluzione fondamentale esplicita, che presenta una singolarità simile a quella della soluzione fondamentale dell'equazione del calore. Tale soluzione fondamentale è di classe C^∞ fuori dalla diagonale, quindi (3) è ipoellittico.

Come aveva già osservato Hörmander nella introduzione di [H], utilizzando il metodo di Kolmogorov si può costruire esplicitamente una soluzione fondamentale per (1) e fornire una condizione necessaria e sufficiente di ipoellitticità. Tale condizione è la seguente

$\operatorname{Ker}(A)$ non contiene sottospazi non banali B -invarianti

ed è equivalente alla condizione di Hörmander

$$(H) \quad \operatorname{rango} \mathfrak{L}(Y_1, \dots, Y_N, Y) = N + 1 \quad \text{in ogni punto di } \mathbb{R}^{N+1}.$$

Una generalizzazione dell'equazione di Kolmogorov è stata studiata da Garofalo e Lanconelli [GL], che hanno dimostrato una disuguaglianza di Harnack nel caso in cui, sostanzialmente, l'algebra di Lie $\mathfrak{L}(Y_1, \dots, Y_N, Y)$ è generata dagli operatori Y_1, \dots, Y_N, Y e dai loro commutatori del primo ordine.

Una soluzione fondamentale esplicita per (1) nel caso ipoellittico è stata determinata anche da Kuptcov [K].

Nel nostro lavoro a partire dalla forma esplicita della soluzione fondamentale abbiamo individuato una struttura di gruppo in \mathbb{R}^{N+1} rispetto alle cui traslazioni a sinistra l'operatore L risulta invariante.

Inoltre nella classe \mathfrak{L} degli operatori ipoellittici del tipo (1) abbiamo individuato la sottoclasse \mathfrak{L}_0 degli operatori invarianti rispetto ad un gruppo di dilatazioni. Per questi operatori, un risultato astratto di Bony [B] permette di dimostrare facilmente una disuguaglianza di Harnack, che risulta essere invariante rispetto allo stesso gruppo di dilatazioni corrispondente all'operatore.

Abbiamo poi dimostrato che ogni operatore $L \in \mathfrak{L}$ ha una parte principale $L_0 \in \mathfrak{L}_0$ tale che, se Γ e Γ_0 sono le soluzioni fondamentali rispettivamente di L e di L_0 con polo in $z_0 = (0,0)$, allora

$$\frac{1}{c} \Gamma_0(z) \leq \Gamma(z) \leq c \Gamma_0(z)$$

per ogni $z \in \mathbb{R}^{N+1}$ tale che $\Gamma_0(z) > 1$, con $c =$ costante positiva.

§ 1 - Costruzione della soluzione fondamentale

Sia

$$(1.1) \quad L = \operatorname{div}(AD) + \langle x, BD \rangle - \partial_t$$

con A, B matrici costanti $N \times N$, A simmetrica e semidefinita positiva.

Determiniamo una soluzione del problema di Cauchy

$$(1.2) \quad \begin{cases} Lu = 0 & \text{per } t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi & \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Indichiamo con $\hat{\cdot}$ la trasformata di Fourier rispetto alle variabili spaziali. Procedendo formalmente da (1.2) si ottiene

$$(1.3) \quad \begin{cases} (\langle A\xi, \xi \rangle + \operatorname{tr}(B))\hat{u} + \langle B\xi, D_\xi \hat{u} \rangle + \partial_t \hat{u} = 0 \\ \hat{u}|_{t=0} = \hat{\varphi} \end{cases}$$

Integrando (1.3) col metodo delle caratteristiche si ottiene

$$(1.4) \quad \begin{cases} \hat{u}(t, \xi) = \hat{\varphi}(\eta) \exp\left(-t \operatorname{tr}(B) - \int_0^t \langle A \exp(sB)\eta, \exp(sB)\eta \rangle ds\right) \\ \xi = \exp(tB)\eta \end{cases}$$

Da (1.4), ponendo

$$(1.5) \quad E(t) = \exp(-t^T B) \quad C(t) = \int_0^t E(s) A^T E(s) ds$$

si ricava

$$(1.6) \quad \hat{u}(t, \xi) = \hat{\varphi}(E(t)\xi) \exp(-t \operatorname{tr}(B) - \langle C(t)\xi, \xi \rangle)$$

Se

$$(1.7) \quad C(t) > 0 \quad \forall t > 0$$

la (1.6) si può invertire e dà

$$u(x, t) = (2\pi)^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y) \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle y, E(-t)\xi \rangle + i\langle x, \xi \rangle} \exp\left(-t \operatorname{tr}(B) - \int_0^t \langle A E(s)\xi, E(s)\xi \rangle ds\right) d\xi \right)$$

onde, la soluzione fondamentale di L con polo nel punto $(y, 0)$ per $t > 0$ è data da

$$\begin{aligned}\Gamma(x, t; y, 0) &= (2\pi)^{-N} e^{-t\text{tr}(B)} \int_{\mathbb{R}^N} \exp(-i\langle x - E(t)y, \xi \rangle - \langle C(t)\xi, \xi \rangle) d\xi \\ &= \frac{(2\pi)^{-N} e^{-t\text{tr}(B)}}{\sqrt{\det C(t)}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp(-i\langle C^{-1/2}(t)(x - E(t)y), \xi \rangle - |\xi|^2) d\xi\end{aligned}$$

In definitiva

$$\Gamma(x, t; y, 0) = \begin{cases} \frac{(4\pi)^{-N/2} e^{-t\text{tr}(B)}}{\sqrt{\det C(t)}} \exp\left(-\frac{1}{4}\langle C^{-1}(t)(x - E(t)y), x - E(t)y \rangle\right) & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{per } t \leq 0 \end{cases}$$

Se poniamo

$$(1.8) \quad \Gamma(x, t) = \begin{cases} \frac{(4\pi)^{-N/2} e^{-t\text{tr}(B)}}{\sqrt{\det C(t)}} \exp\left(-\frac{1}{4}\langle C^{-1}(t)x, x \rangle\right) & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{per } t \leq 0 \end{cases}$$

possiamo quindi scrivere la soluzione fondamentale di L con polo nel punto (y, τ) nel modo seguente

$$(1.9) \quad \Gamma(x, t; y, \tau) = \Gamma(x - E(t - \tau)y, t - \tau)$$

La condizione (1.7) si può esprimere in termini delle matrici A e B . A questo scopo introduciamo alcune notazioni. Poniamo

$$X_j = \sum_{k=0}^N a_{j,k} \partial_{x_k}, \quad j = 1, \dots, N, \quad Y = \langle x, BD \rangle.$$

Indichiamo poi con $\mathfrak{L}(X_1, \dots, X_N, Y)$ l'algebra di Lie generata da X_1, \dots, X_N, Y .

Proposizione 1 - Sono equivalenti le affermazioni seguenti:

- (i) $C(t) > 0$ per ogni $t > 0$
- (ii) $\text{Ker}(A)$ non contiene sottospazi non banali B -invarianti
- (iii) $\text{rango } \mathfrak{L}(X_1, \dots, X_N, Y) = N$ in ogni punto di \mathbb{R}^N .

Dimostrazione - Osserviamo, preliminarmente, che $C(t) \geq 0$ per ogni $t > 0$ in quanto A è semidefinita positiva. Per la stessa ragione, per ogni fissato $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$\xi \neq 0$, la funzione $t \mapsto \langle C(t)\xi, \xi \rangle$ è monotona non decrescente. Di conseguenza se, per un $t > 0$, risulta $\langle C(t)\xi, \xi \rangle = 0$, allora

$$\langle C(s)\xi, \xi \rangle = 0 \quad \text{per } 0 < s \leq t.$$

Ricordando la definizione di C (si veda (1.5)) questo implica

$$\langle A^T E(s)\xi, E(s)\xi \rangle = 0 \quad \text{per } 0 < s \leq t$$

e quindi

$$A^T E(s) = 0 \quad \text{per } 0 < s \leq t$$

onde (cfr. la (1.5))

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{s^k}{k!} AB^k \right) (\xi) = 0 \quad \text{per } 0 < s \leq t.$$

Questo implica

$$AB^k(\xi) = 0 \quad \text{per ogni } k \geq 0.$$

Resta così provato che

$$(1.10) \quad AB^k(\xi) = 0 \quad \forall k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = 0.$$

Poichè questa condizione è equivalente alla (ii), abbiamo provato che (i) e (ii) sono equivalenti.

Proviamo ora l'equivalenza di (i) e (iii). A questo scopo introduciamo le seguenti notazioni:

$$X_{(j,0)} = X_j, \quad X_{(j,k+1)} = [X_{(j,k)}, Y], \quad k \geq 0, j = 1, \dots, N.$$

Identificando l'operatore $Z = \sum_{i=1}^N c_i \partial_{x_i}$ col vettore (c_1, \dots, c_N) , si riconosce immediatamente che

$$X_{(j,k)} = \text{riga } j\text{-esima di } AB^k, \quad k \geq 0, j = 1, \dots, N.$$

Pertanto

$$(1.11) \quad \text{rango } \mathfrak{B}(X_1, \dots, X_N, Y)(0) = N + 1$$

se, e solo se, vale la (1.10) e, quindi, la (iii).

Questo conclude la prova della Proposizione in quanto la (1.11) è equivalente alla (iii).

Osservazione 1 - Se indichiamo con Y_1, \dots, Y_N i vettori (operatori differenziali) riga di A^k e con Y_0 l'operatore

$$(1.12) \quad Y_0 = Y - \partial_t,$$

possiamo esprimere l'operatore L nel modo seguente

$$L = \sum_{j=1}^N Y_j^2 + Y_0.$$

Ora, per quanto visto nel corso della prova della proposizione precedente, la condizione

$$(iii') \quad \text{rango } \mathfrak{B}(Y_1, \dots, Y_N, Y) = N$$

è equivalente alla seguente

$$(1.10') \quad A^k B^k(\xi) = 0 \quad \forall k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = 0.$$

Poichè $\text{Ker}(A^k) = \text{Ker}(A)$, le condizioni (1.10) e (1.10') sono fra loro equivalenti. Tali risultano quindi anche (iii) e (iii'). D'altra parte (iii') è equivalente alla condizione di Hörmander

$$(1.13) \quad \text{rango } \mathfrak{B}(Y_1, \dots, Y_N, Y_0) = N + 1$$

in ogni punto di \mathbb{R}^{N+1} .

Osservazione 2 - L'esplicita espressione della soluzione fondamentale (1.9), suggerisce una altrettanto esplicita struttura di gruppo su \mathbb{R}^{N+1} rispetto alla quale l'operatore L risulta invariante per traslazioni a sinistra. Si tratta di un caso particolare dell'analisi generale condotta da Rothschild-Stein [RS].

Posto

$$(x, t) \circ (y, \tau) = (y + E(\tau)x, t + \tau), \quad (x, t), (y, \tau) \in \mathbb{R}^{N+1},$$

allora $(\mathbb{R}^{N+1}, \circ)$ è un gruppo il cui elemento neutro è $(0, 0)$. Inoltre, se $(y, \tau) \in \mathbb{R}^{N+1}$,

$$(y, \tau)^{-1} = (-E(-\tau)y, -\tau).$$

Di conseguenza, la soluzione fondamentale di L si può scrivere nella maniera seguente (cfr. la (1.9))

$$\begin{aligned}\Gamma(x, t; y, \tau) &= \Gamma((y, \tau)^{-1} \circ (x, t); 0, 0) \\ &= \Gamma((y, \tau)^{-1} \circ (x, t))\end{aligned}$$

Posto poi

$$(1.14) \quad l_\zeta: \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}, \quad l_\zeta(z) = \zeta^{-1} \circ z$$

con un calcolo diretto si riconosce subito che

$$l_\zeta \circ L = L \circ l_\zeta$$

per ogni $\zeta \in \mathbb{R}^{N+1}$.

§ 2 - Operatori invarianti per dilatazioni

Innanzitutto osserviamo che un cambiamento di variabili lineare non altera la forma dell'operatore L così come, ovviamente, la condizione di Hörmander (H).

Possiamo quindi supporre di scegliere su \mathbb{R}^N una base ortonormale, a ventaglio, per i sottospazi di \mathbb{R}^N

$$V_0, V_1, \dots, V_r$$

ove

$$V_k = \text{span}\{X_{(i,i)} | j = 1, \dots, N, i = 0, \dots, k\}$$

è lo spazio vettoriale generato da X_1, \dots, X_N e dai loro commutatori con Y di "altezza" $\leq k$. Supponiamo anche di aver scelto su V_0 una base di autovettori della matrice A . Rispetto a questa base la matrice A assume quindi la seguente forma

$$(2.1) \quad A = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad A_0 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{p_0}), \quad \lambda_j > 0, \quad 1 \leq j \leq p_0,$$

Inoltre

Proposizione 2 - La matrice B si esprime nella seguente forma:

$$(2.2) \quad B = \begin{bmatrix} * & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \dots & B_r \\ * & * & * & \dots & * \end{bmatrix},$$

ove B_i è una matrice $p_{i-1} \times p_i$ di rango massimo uguale a p_i , $i = 1, \dots, r$. Risulta poi $p_0 = \dim(V_0)$, $p_0 + \dots + p_i = \dim(V_i)$, $i = 1, \dots, r$. I coefficienti delle matrici indicate con * possono essere del tutto arbitrari.

Dimostrazione - Se rappresentiamo la matrice $B = (B_{i,j})$ dividendola nei blocchi $B_{i,j}$ di dimensione $p_{i-1} \times p_j$, $i, j = 0, \dots, r$, allora la matrice AB ha la forma

$$AB = \begin{bmatrix} A_0 B_{0,0} & A_0 B_{0,1} & A_0 B_{0,2} & \cdots & A_0 B_{0,r} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Ricordiamo che $X_{(j,1)}$ è la riga j -esima di AB e che d'altra parte $X_{(j,1)} \in V_1$, deve essere $A_0 B_{0,2} = 0, \dots, A_0 B_{0,r} = 0$. Inoltre, poichè $V_1 = \text{span} \{ X_{(j,0)}, X_{(j,1)} \mid j = 1, \dots, N \}$, deve anche essere $A_0 B_{0,1}$ di rango massimo. Quindi, poichè A_0 è non singolare, si ha $B_{0,2} = 0, \dots, B_{0,r} = 0$, $B_1 \equiv B_{0,1}$ di rango massimo.

Possiamo allora esprimere la matrice B nella forma seguente:

$$B = \begin{bmatrix} * & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} & \cdots & B_{1,r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r,0} & B_{r,1} & B_{r,2} & \cdots & B_{r,r} \end{bmatrix}$$

Consideriamo ora i vettori $X_{(j,2)}$ che sono le righe j -esime della matrice AB^2 .

$$AB \cdot B = \begin{bmatrix} * & A_0 B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} & \cdots & B_{1,r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r,0} & B_{r,1} & B_{r,2} & \cdots & B_{r,r} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} * & * & A_0 B_1 B_{1,2} & A_0 B_1 B_{1,3} & \cdots & A_0 B_1 B_{1,r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Ragionando come prima si osserva che deve essere $A_0 B_1 B_{1,2}$ di rango massimo e $A_0 B_1 B_{1,3} = 0, \dots, A_0 B_1 B_{1,r} = 0$. Poichè inoltre $A_0 B_1$ ha rango massimo, risulta infine che $B_1 \equiv B_{1,2}$ ha rango massimo e $B_{1,3} = 0, \dots, B_{1,r} = 0$. La matrice B si scrive quindi nella seguente forma

$$B = \begin{bmatrix} * & B_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & B_2 & 0 & \cdots & 0 \\ B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} & \cdots & B_{2,r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r,0} & B_{r,1} & B_{r,2} & B_{r,3} & \cdots & B_{r,r} \end{bmatrix}$$

Procedendo per induzione sulle righe di B si arriva ad esprimere la matrice nella forma (2.2).

Proviamo ora che quando i blocchi * ~~sono tutti~~ nulli l'operatore L è invariante rispetto ad un gruppo di dilatazioni. Premettiamo alcune definizioni:

Fissati $\alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 = 1$, per ogni $\lambda > 0$ poniamo

$$(2.3) \quad D(\lambda): \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}, \quad D(\lambda)(x, t) = (\lambda^{\alpha_1} x_1, \dots, \lambda^{\alpha_N} x_N, \lambda^\beta t),$$

$(D(\lambda))_{\lambda > 0}$ è un gruppo di dilatazioni. Diremo che L è invariante rispetto a questo gruppo se

$$L \circ D(\lambda) = \lambda^2 D(\lambda) \circ L \quad \forall \lambda > 0.$$

Proposizione 3 - *L'operatore L è invariante rispetto ad un gruppo di dilatazioni del tipo (2.3) se e solo se tutti i blocchi * della forma canonica (2.2) della matrice B sono nulli. In tal caso le dilatazioni del gruppo di invarianza sono del tipo seguente:*

$$(2.4) \quad D(\lambda) = \text{diag}(\lambda I_{p_0}, \lambda^3 I_{p_1}, \dots, \lambda^{2r+1} I_{p_r}, \lambda^2)$$

dove I_k indica la matrice identità $k \times k$.

Dimostrazione - Per ogni $(a, b) \in \mathbb{R}^{N+1}$ poniamo

$$u(x, t) = \exp(\langle a, x \rangle + b t)$$

Allora

$$(L \circ D(\lambda))u(x, t) = \lambda^2 \left(\sum_{i=1}^{p_0} \lambda^{2\alpha_i - 2} a_i^2 + \sum_{i,j=1}^N b_{i,j} (\lambda^{\alpha_i} x_i) \lambda^{\alpha_j - \alpha_i - 2} a_j - \lambda^{\beta - 2} b \right) (u \circ D(\lambda))(x, t)$$

mentre

$$\lambda^2 (D(\lambda) \circ L)u(x, t) = \lambda^2 \left(\sum_{i=1}^{p_0} a_i^2 + \sum_{i,j=1}^N b_{i,j} (\lambda^{\alpha_i} x_i) a_j - b \right) (u \circ D(\lambda))(x, t).$$

Pertanto se L è $(D(\lambda))_{\lambda > 0}$ -invariante dovrà essere

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_{p_0} = 1, \quad \beta = 2, \quad b_{i,j} \lambda^{\alpha_j - \alpha_i - 2} = b_{i,j} \quad \text{per } i, j = 1, \dots, N.$$

Da questa, tenendo presente la (2.2), segue che i blocchi * sono nulli e che $D(\lambda)$ è del tipo (2.4).

Viceversa, se sono verificate queste ultime condizioni, si riconosce immediatamente che L è $(D(\lambda))_{\lambda>0}$ -invariante.

Nel seguito indicheremo con $D_0(\lambda)$ la restrizione di $D(\lambda)$ ad \mathbb{R}^N . Indicheremo inoltre con \mathfrak{A} la classe degli operatori (1.1) verificante la condizione (H) e con \mathfrak{A}_0 la sottoclasse degli operatori di \mathfrak{A} invarianti rispetto ad un gruppo di dilatazioni $(D(\lambda))_{\lambda>0}$.

Se $L \in \mathfrak{A}_0$ la matrice B risulta nilpotente (cfr; la Proposizione 3)^(*) e quindi le matrici E e C sono dei polinomi nella variabile t . Possiamo anche ottenere una più esplicita rappresentazione della matrice C . A questo scopo richiamiamo alcune notazioni. Se $(D(\lambda))_{\lambda>0}$ è un gruppo di dilatazioni del tipo (2.4) indichiamo con $Q+2$ la dimensione omogenea di \mathbb{R}^{N+1} rispetto a $(D(\lambda))_{\lambda>0}$:

$$(2.5) \quad Q+2 = p_0 + 3p_1 + \dots + (2r+1)p_r + 2$$

Osserviamo che $Q+2$ è anche definito dalla

$$(2.6) \quad \det(D(\lambda)) = \lambda^{Q+2}.$$

Nel seguito chiameremo Q la dimensione omogenea spaziale. Ovviamente Q è la dimensione omogenea di \mathbb{R}^N rispetto al gruppo $(D_0(\lambda))_{\lambda>0}$.

Proposizione 4 - Se $L \in \mathfrak{A}_0$ allora

$$(2.7) \quad C(t) = D_0(\sqrt{t})C(1)D_0(\sqrt{t})$$

e quindi, se Γ indica la soluzione fondamentale di L con polo in $(0,0)$,

$$(2.8) \quad \Gamma(x,t) = \frac{c_N}{t^{Q/2}} \exp\left(-\frac{1}{4}\left\langle C^{-1}(1)D_0\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)x, D_0\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)x \right\rangle\right)$$

dove c_N è una costante.

Dimostrazione - Poichè L è invariante rispetto a $(D(\lambda))_{\lambda>0}$ risulta

$$\Gamma \circ D(\lambda) = \lambda^{-Q}\Gamma$$

e quindi, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e $t > 0$,

(*) Non vale il viceversa

$$\lambda^{-e} = \left(\frac{\det(C(t))}{\det(C(\lambda^2 t))} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{1}{4} \langle C^{-1}(\lambda^2 t) D_0(\lambda) x, D_0(\lambda) x \rangle + \frac{1}{4} \langle C^{-1}(t) x, x \rangle \right)$$

Questo implica

$$D_0(\lambda) C^{-1}(\lambda^2 t) D_0(\lambda) = C^{-1}(t)$$

e quindi, scegliendo $\lambda = \frac{1}{\sqrt{t}}$, la (2.7). La (2.8) segue poi dalla (1.7) e dal fatto che

$$\det(D_0(\lambda)) = \lambda^e.$$

§ 3 - Operatori non invarianti per dilatazioni

Lo scopo di questo paragrafo è quello di provare che per ogni operatore $L \in \mathfrak{L}$ esiste un operatore $L_0 \in \mathfrak{L}_0$ tale che se Γ e Γ_0 indicano rispettivamente le soluzioni fondamentali di L e di L_0 con polo in $(0,0)$, risulta

$$\Gamma \cong \Gamma_0$$

su ogni fissato insieme di livello di Γ (o di Γ_0).

Sia L un operatore del tipo

$$(3.1) \quad L = \operatorname{div}(AD) + \langle x, BD \rangle - \partial_t.$$

In questo e nei successivi paragrafi supporremo di aver fissato una base ortonormale in \mathbb{R}^N in modo che le matrici A e B in (3.1) si scrivano nelle forme canoniche (2.1) e (2.2). Indicheremo poi con L_0 l'operatore che si ottiene da L cancellando nella matrice B tutti i blocchi indicati con *. Chiameremo L_0 la parte principale di L . L'operatore L_0 risulta invariante rispetto ad un gruppo di dilatazioni $(D(\lambda))_{\lambda > 0}$ (cfr. Proposizione 2). Ricordiamo che con $D_0(\lambda)$ indichiamo la restrizione di $D(\lambda)$ ad \mathbb{R}^N :

$$D_0(\lambda) = D(\lambda)|_{\mathbb{R}^N}.$$

Siano ora $C(t)$ e $C_0(t)$ le matrici definite in (1.5) relative rispettivamente agli operatori L e L_0 . Vale allora il seguente

Lemma 1 - Se indichiamo $C(t) = (c_{i,j}(t))$, $C_0(t) = (c_{0,i,j}(t))$, $i, j = 1, \dots, N$, risulta

$$(3.2) \quad c_{i,j}(t) = c_{0,i,j}(t)(1 + tO(1)), \quad \text{per } t \rightarrow 0, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

ove $O(1)$ indica una funzione limitata in $(x,t) \in]0,1] \times \mathbb{R}^N$.

Dimostrazione - Esprimiamo la funzione integranda $E(s)A^T E(s)$ in (1.5) come polinomio in s con resto. Poichè

$$E(s) = \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k \frac{s^k}{k!} B^k + O(s^{k+1}) \quad \text{per } s \rightarrow 0$$

(dove $O(s^{k+1}) = s^{k+1}O(1)$), possiamo scrivere

$$(3.3) \quad E(s)A^T E(s) = \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k \frac{s^k}{k!} F_k + O(s^{k+1}) \quad \text{per } s \rightarrow 0$$

con

$$(3.4) \quad F_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} {}^T B^j A B^{k-j}$$

Proveremo che la (3.2) è conseguenza della particolare forma delle matrici F_k , che a sua volta dipende dalla forma canonica di A e di B .

Abbiamo già notato che

$$AB^m = \begin{bmatrix} *^{(1)} & \dots & *^{(1)} & A_0 B_1 \dots B_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

con il blocco $A_0 B_1 \dots B_m$ di rango massimo, posto nella $(m+1)$ -esima colonna di blocchi.

I blocchi $*^{(1)}$ sono stati ottenuti moltiplicando A_0 , qualche blocco del tipo B_j ed almeno un blocco $*$ di B . Osserviamo esplicitamente che per l'operatore L_0 tutti i blocchi $*^{(1)}$ sono nulli.

Moltiplicando AB^m a sinistra per ${}^T B^j$ si ottiene

$$(3.5) \quad {}^T B^j A B^m = \begin{bmatrix} *^{(2)} & \dots & *^{(2)} & *^{(2)} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ *^{(2)} & \dots & *^{(2)} & *^{(2)} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ *^{(2)} & \dots & *^{(2)} & {}^T B_{j \dots j} {}^T B_1 A_0 B_1 \dots B_m & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Di nuovo il blocco ${}^T B_{j \dots j} {}^T B_1 A_0 B_1 \dots B_m$ ha rango massimo ed occupa la posizione $(j+1, m+1)$ nella suddivisione in blocchi della matrice ${}^T B^j A B^m$. I blocchi $*^{(2)}$ hanno le stesse proprietà dei blocchi $*^{(1)}$: in particolare sono nulli per l'operatore L_0 .

Dalla (3.5) e dalla (3.4) si deduce che la matrice F_k ha le seguenti proprietà:

- (i) tutti i blocchi di posizione $(j+1, m+1)$, $0 \leq j, m \leq r$, con $m+j > k$ sono necessariamente nulli;

- (ii) i blocchi di posizione $(j+1, m+1)$ con $m+j=k$ sono esattamente ${}^T B_j \dots {}^T B_1 A_0 B_1 \dots B_m$, sia per l'operatore L che per L_0 ;
- (iii) i blocchi di posizione $(j+1, m+1)$ con $m+j < k$ sono somme di blocchi ${}^{*(2)}$ e sono tutti nulli per l'operatore L_0 .

Quindi, fissati $j, m \in \mathbf{N}$, $0 \leq j, m \leq r$, il blocco di posizione $(j+1, m+1)$ nell'espressione (3.3) risulta essere

$$(3.6) \quad \left(E(s) A^T E(s) \right)_{j+1, m+1} = {}^T B_j \dots {}^T B_1 A_0 B_1 \dots B_m (-1)^k \frac{s^k}{k!} \cdot \left(1 + {}^{*(3)}_1 s + \dots + {}^{*(3)}_{2r-k} s^{2r-k} \right) + O(s^{2r+1}) \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

dove $k = j + m + 2$ ed i blocchi ${}^{*(3)}_j$ hanno le stesse proprietà dei blocchi ${}^{*(2)}$. Poichè infine la matrice B corrispondente ad L_0 è nilpotente, la (3.6) relativa a L_0 , oltre ad avere tutti i blocchi ${}^{*(3)}_j$ nulli, vale senza il resto $O(s^{2r+1})$. A causa di quest'ultima osservazione, integrando la (3.6) sull'intervallo $[0, t]$, dalla definizione di $C(t)$ (vedi (1.5)), si ottiene la (3.2).

Lemma 2 - *Se poniamo*

$$(3.7) \quad M(t) = D_0 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) \left(C(t) - C_0(t) \right) D_0 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right), \quad \text{per } t > 0,$$

risulta

$$(3.8) \quad \|M(t)\| = O(t) \quad \text{per } t \rightarrow 0.$$

Dimostrazione - Se indichiamo $M(t)$ con $(m_{i,j}(t))_{i,j=1,\dots,N}$, per il Lemma 1 si ha, per $t \rightarrow 0$,

$$m_{i,j}(t) = O(t) \left(\left(D_0 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) C_0(t) D_0 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) \right)_{i,j} \right) = O(t) c_{0,i,j}(1).$$

Questo prova la (3.8).

Lemma 3 - *Per ogni $t > 0$ risulta*

$$(3.9) \quad \langle C(t)x, x \rangle = \langle C_0(t)x, x \rangle (1 + tO(1))$$

$$(3.10) \quad \langle C^{-1}(t)x, x \rangle = \langle C_0^{-1}(t)x, x \rangle (1 + tO(1))$$

ove $O(1)$ indica una funzione limitata in $(x, t) \in]0, 1] \times \mathbb{R}^N$.

Dimostrazione - per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e per ogni $t > 0$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{\langle (C(t) - C_0(t))x, x \rangle}{\langle C_0(t)x, x \rangle} &= \left(\text{posto } x = D_0 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) y \right) \\ &= \frac{\langle M(t)y, y \rangle}{\langle C_0(1)y, y \rangle} \end{aligned}$$

in forza della (3.7) e della (2.7). Da questa, per il Lemma 2, segue la (3.9).

Analogamente,

$$\begin{aligned} \frac{\langle (C_0^{-1}(t) - C^{-1}(t))x, x \rangle}{\langle C^{-1}(t)x, x \rangle} &= (\text{posto } x = C(t)y) \\ &= \frac{\langle C(t)C_0^{-1}(t)C(t)y, y \rangle - \langle C(t)y, y \rangle}{\langle C(t)y, y \rangle} = \\ (3.11) \quad &= \frac{\langle (C(t) - C_0(t))C_0^{-1}(t)(C(t) - C_0(t))y, y \rangle}{\langle C(t)y, y \rangle} + \\ &+ \frac{\langle (C(t) - C_0(t))y, y \rangle}{\langle C(t)y, y \rangle} = R(x, t) + S(x, t) \end{aligned}$$

Ora, poichè a causa della (3.9) risulta

$$(3.12) \quad \frac{\langle C(t)y, y \rangle}{\langle C_0(t)y, y \rangle} = 1 + tO(1),$$

ancora per la (3.9) si ha

$$(3.13) \quad R(x, t) = \frac{\langle C_0(t)y, y \rangle}{\langle C(t)y, y \rangle} \frac{\langle (C(t) - C_0(t))y, y \rangle}{\langle C_0(t)y, y \rangle} = tO(1).$$

D'altra parte, per le (3.7) e (3.8), risulta

$$\begin{aligned} \frac{\langle (C(t) - C_0(t))C_0^{-1}(t)(C(t) - C_0(t))y, y \rangle}{\langle C_0(t)y, y \rangle} &= \left(\text{posto } y = D_0 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) z \right) \\ &= \frac{\langle M(t)C_0^{-1}(1)M(t)z, z \rangle}{\langle C_0(1)z, z \rangle} \end{aligned}$$

Da questa e dalla (3.13) segue che $S(y, t) = t^2 O(1)$; quest'ultima relazione unitamente alla (3.11), alla (3.12) e alla (3.13), prova la (3.10).

Possiamo ora provare il principale risultato di questo paragrafo

Teorema 1 - Sia L un operatore del tipo (3.1) e sia L_0 la parte principale di L . Allora, se indichiamo rispettivamente con Γ e Γ_0 le soluzioni fondamentali con polo in $(0,0)$ di L e di L_0 (cfr. (1.8)), per ogni $b > 0$ esiste una costante $a > 0$ tale che

$$(3.14) \quad \frac{1}{a} \Gamma_0(x, t) \leq \Gamma(x, t) \leq a \Gamma_0(x, t)$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^{N+1}$ tale che $\Gamma_0(x, t) > b$.

Dimostrazione - Siano C e C_0 le matrici definite in (1.5) relativamente agli operatori L ed L_0 . Per la (3.9) del Lemma 3, ricordando che il determinante di una matrice simmetrica definita positiva è il prodotto dei suoi autovalori e che questi ultimi si possono determinare con un procedimento di mini-max applicato alla forma quadratica associata alla matrice stessa, risulta:

$$(3.15) \quad \det C(t) = \det C_0(t) (1 = tO(1)), \quad \text{per } t \rightarrow 0+.$$

D'altra parte, per la (3.10)

$$(3.16) \quad \exp\left(-\frac{\langle C^{-1}(t)x, x \rangle}{4}\right) = \exp\left(-\frac{\langle C_0^{-1}(t)x, x \rangle}{4}\right) \exp(t \langle C_0^{-1}(t)x, x \rangle O(1)).$$

Ora, se $\Gamma_0(x, t) > b$, risulta (cfr. (1.8) e (2.8))

$$(3.17) \quad \langle C_0^{-1}(t)x, x \rangle \leq 4Q \log\left(\left(\frac{c_N}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t}\right) \quad \text{per } t \rightarrow 0.$$

Dalla (1.8) e dalle (3.15), (3.16) e (3.17) segue subito la (3.14).

Osserviamo esplicitamente che nella (3.14) i ruoli di Γ e Γ_0 si possono invertire. Questo segue subito dalla prova del Teorema.

§ 4 - Disuguaglianza di Harnack

In questo paragrafo dimostreremo una disuguaglianza di Harnack per gli operatori della classe \mathfrak{L}_0 , cioè per gli operatori

$$(4.1) \quad L = \operatorname{div}(AD) + \langle x, BD \rangle - \partial_t$$

che risultano invarianti rispetto ad un gruppo di dilatazioni. La prova si basa sull'invarianza di L tanto rispetto alle dilatazioni $D(\lambda)$ (cfr. (2.3)) quanto rispetto alle traslazioni L_ζ (cfr. (1.14)), e sulla seguente disuguaglianza di Harnack debole, dovuta a Bony.

Teorema (Bony [B], Teorema 7.1) - Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^{N+1} e sia T un insieme denso in Ω . Allora per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ esistono $z_1, \dots, z_p \in \Omega$ ed una costante $c > 0$ tali che

$$\sup_K u \leq c(u(z_1) + \dots + u(z_p))$$

per ogni $u \in C^\infty(\Omega)$, $u \geq 0$, verificante $Lu = 0$ in Ω .

Da questo Teorema e dalla ipoellitticità di L , segue immediatamente la seguente

Proposizione 5 - Sia $(u_n)_{n \geq 1}$ una successione di soluzioni di (4.1) tali che per ogni $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq u_{n+1}$. Sia poi u il limite puntuale della successione $(u_n)_{n \geq 1}$. Supponiamo che $u < \infty$ in un insieme denso in Ω . Allora $u \in C^\infty(\Omega)$ e $Lu = 0$ in Ω .

Dimostrazione - Dal Teorema di Bony segue che $(u_n)_{n \geq 1}$ converge uniformemente su ogni compatto di Ω , e quindi $u \in C(\Omega)$. Essendo poi $Lu_n = 0$ in Ω per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta anche $Lu = 0$ nel senso delle distribuzioni. Poichè L è ipoellittico risulta $u \in C^\infty(\Omega)$ e $Lu = 0$ in senso classico.

Per ogni $r > 0$ e per ogni fissato $\varepsilon \in]0, 1[$ poniamo

$$\Omega_r(z_0) = \left\{ z \in \mathbb{R}^{N+1} \mid \Gamma(z; z_0) > \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{Q}{2}} \right\},$$

$$K_r(z_0) = \Omega_r(z_0) \cap \{(x, t) \in \mathbb{R}^{N+1} \mid t \leq t_0 - \varepsilon r\}.$$

Per le soluzioni di $Lu = 0$ vale allora la seguente formula di media, che si ottiene con un metodo del tutto standard a partire dall'identità di Green:

$$(4.2) \quad u(z_0) = \frac{1}{r^{2/2}} \int_{\Omega_r(z_0)} M(z_0, z) u(z) dz$$

per ogni $z_0 \in \Omega$ e per ogni $r > 0$ tale che $\overline{\Omega_r(z_0)} \subseteq \Omega$. In (4.2) $M(z_0, z)$ indica il nucleo

$$M = \frac{\langle AD\Gamma, D\Gamma \rangle}{\Gamma^2}, \quad \Gamma = \Gamma(z_0, z).$$

Vale allora il seguente

Teorema 2 - Sia $L \in \mathfrak{A}_0$ e sia Ω un aperto di \mathbb{R}^{N+1} . Supponiamo che per un fissato z_0 e per un $r > 0$ risulti $\overline{\Omega_{2r}(z_0)} \subseteq \Omega$. Allora per ogni fissato $\varepsilon > 0$ esiste una costante $c > 0$ tale che, per ogni $u \geq 0$ soluzione di $Lu = 0$ in Ω risulta

$$(4.3) \quad \sup_{K_r} u \leq cu(z_0)$$

con $c = c(\varepsilon)$ indipendente da r .

Dimostrazione - Per l'invarianza rispetto alle traslazioni ed alle dilatazioni, non è restrittivo supporre $z_0 = (0, 0)$ ed $r = 1$.

Supponiamo per assurdo che la (4.3) non sia vera. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $u_n \in C^\infty(\Omega)$, $u_n \geq 0$, tale che

$$\sup_{K_1} u_n > 4^n u_n(0).$$

Ovviamente per ogni $n \in \mathbb{N}$ $u_n(0) \neq 0$ (altrimenti per il principio del massimo forte dovrebbe essere $u_n \equiv 0$ in $\Omega_2(0)$). Possiamo quindi definire le seguenti funzioni

$$v_n(z) = \frac{u_n(z)}{u_n(0)}, \quad v(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(z)}{2^n}$$

e porre

$$T = \{z \in \Omega \mid v(z) < +\infty\}.$$

T è non vuoto in quanto $v(0) = 1$, inoltre T è denso in $\Omega_2(0)$. Se infatti T non fosse denso, esisterebbero $z \in \Omega_2(0)$ e $\rho > 0$ tali che $v|_{B(z, \rho)} \equiv +\infty$. Ma questo non è possibile in quanto, per la formula di media, deve risultare

$$1 = v(0) = \int_{\Omega_2(0)} M(0, z) v(z) dz = +\infty$$

dal momento che il nucleo M è strettamente positivo tranne che in un insieme di misura nulla.

Applichiamo ora la Proposizione 5 alla successione delle somme parziali

$$\left(w_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{v_k(z)}{2^k} \right)_{n \geq 1}$$

risulta allora che la funzione v è limitata su $K_1(0)$. Questo è in contraddizione con il fatto che

$$v \geq \frac{v_n}{2^n} \geq 2^n$$

almeno in un punto di $K_1(0)$.

Il Teorema 2 vale anche, con lo stesso enunciato, per un operatore della classe \mathfrak{B} non appartenente alla classe \mathfrak{B}_0 . Questo segue sostanzialmente dal Teorema 1 sul confronto fra la soluzione fondamentale di un operatore e quella della sua parte principale.

Bibliografia essenziale

- [B] J. -M. Bony, *Principe de Maximum, Inégalité de Harnack et Unicité du Problème de Cauchy pour les Opérateurs Elliptiques Dégénérés*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble , **19,1** (1969), 277-304.
- [GL] N. Garofalo, E. Lanconelli, *Level Sets of the Fundamental Solution and Harnack Inequality for Degenerate Equations of Kolmogorov Type*, Trans. Amer. Math. Soc., **321** (1990), 775-792.
- [H] L. Hörmander, *Hypoelliptic Second Order Differential Equations*, Acta Math., **119** (1967), 147-171.
- [K] L. P. Kuptcov, *Fundamental Solutions for a Class of Second-Order Elliptic-Parabolic Equations*, Differents. Uravneniya , **8** (1972), 1649-1660.
- [RS] L. P. Rothschild, E. M. Stein, *Hypoelliptic Differential Operators and Nilpotent Groups*, Acta Math., **137** (1977), 247-320.